SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

*Angelo Favini*

# EQUAZIONI PARABOLICHE DEGENERI DEL SECONDO ORDINE

5 marzo 1992

**1.Introduzione e preliminari.** In questo seminario esporrò alcuni risultati su equazioni differenziali del secondo ordine in uno spazio di Banach, del tipo

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}(Cu') + Bu' + Au = f,$$

ottenuti molto recentemente in collaborazione con A.Yagi (Himeji, Giappone).

Per rendere più chiara l'esposizione, credo sia utile richiamare vari precedenti risultati dei lavori [FY 1,2].

Sia A una trasformazione lineare *multivoca* nello spazio di Banach complesso X. Data f continua da [0,T] in X e dato $v_0 \in D(A)$, cerchiamo una funzione $v:[0,T]\to X$ tale che , se

$$dv(t)/dt = v'(t),$$

allora

$$(P) \qquad \begin{cases} v'(t)+Av(t) \ni f(t), & 0<t\le T, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Su A facciamo le seguenti assunzioni:

(a) $\rho(A) = \{z\in\mathbb{C}: \exists\, (z+A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\}\supseteq$

$\supseteq\Sigma = \{z : \mathrm{Re}\ z \ge -c\,(1+|\mathrm{Im}\ z|)^{\eta}\},\ c > 0,$

(b) $\|(z + A)^{-1};\ \mathcal{L}(X)\| \le M(1+|z|)^{-\beta},\ z\in\Sigma,$

dove

$$0 < \beta \le \eta \le 1.$$

Precisiamo cosa si intende per soluzione del problema (P).

**Definizione 1.** *Diciamo che* $v: [0,T]\to X$ *è una soluzione* CLÅSSICA *di* (P) *se* $v \in C^1((0,T];X)$, $v(t)\in D(A)$, $0 < t \le T$, *e vale* (P).

Si ha ([FY1]):

**Proposizione1.** *Valgano* (a), (b) *e sia*

$$2\eta + \beta > 2.$$

*Se*

$$(2 - \eta - \beta)/\eta < \sigma \le 1$$

*e* $v_0 \in D(A)$, *allora per ogni* $f\in C^{\sigma}([0,T];X)$, *il problema* (P) *ha una unica soluzione classica.*

La Proposizione 1 ha una immediata applicazione a problemi di Cauchy degeneri, come subito vediamo.

Siano L,M due operatori lineari chiusi da Y in X, dove X,Y sono spazi di Banach, $D(L)\subseteq D(M)$, $L^{-1}\in\mathcal{L}(X)$, (cosicchè $ML^{-1}\in\mathcal{L}(X)$), $f:[0,T]\rightarrow X$ continua, $u_0\in D(L)$.

Diciamo che $u:(0,T]\rightarrow Y$ è una soluzione CLASSICA del problema

$$(E)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = f(t), & 0<t\leq T,\\ Mu(0) = Mu_0, \end{cases}$$

se $u(t)\in\mathcal{D}(L)$ per ogni $t\in(0,T]$, $Mu\in C^1((0,T];X)$, $Lu\in C((0,T];X)$ e vale (E), dove la condizione iniziale va intesa nel senso

$$\lim_{t\downarrow 0} \|M[u(t)-u_0]\,;X\| = 0.$$

In virtù della Proposizione 1, abbiamo ([F Y 1])

**Proposizione 2.** *Assumiamo*

(a)' $\{z: zM + L \text{ ha inverso limitato}\}\supseteq$

$$\supseteq \Sigma_\eta = \{ z : \mathrm{Re}\, z \geq -c\,(1 + |\mathrm{Im}\, z|)^\eta\},\ \text{con } c > 0,$$

(b)' $\|M(zM + L)^{-1};\mathcal{L}(X)\| \leq C(1 + |z|)^{-\beta}$,

*dove* $z\in\Sigma_\eta$, $0<\beta\leq\eta\leq 1$.

*Se* $2\eta+\beta>2$ *e* $(2-\eta-\beta)/\eta<\sigma\leq 1$, *per ogni* $f\in C^\sigma([0,T];X)$ *e ogni* $u_0\in D(L)$, *il problema* (E) *ha una ed una sola soluzione classica.*

Maggiori informazioni sulla regolarità della soluzione u di (E) possono essere ottenute quando $\eta = 1$.
A tale fine, premettiamo la

**Definizione 2.** *La funzione* $u:[0,T]\rightarrow Y$ *è una soluzione* STRETTA *di* (E) *se* $u(t)\in D(L)$ *per* $0\leq t\leq T$, $Lu\in C([0,T];X)$, $Mu\in C^1([0,T];X)$ *e vale*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = f(t), & 0\leq t\leq T,\\ Mu(0) = Mu_0. \end{cases}$$

Nel lavoro [F Y2] è stata dimostrata la seguente affermazione.

**Proposizione 3.** *Assumiamo* (a)', (b)',$\eta = 1$. *Allora, dati* $\sigma\in(1-\beta,1)$,

$f\in C^\sigma([0,T];X)$, $u_0\in D(L)$, *soddisfacenti la condizione di compatibilità*

$$f(0) - Lu_0\in \mathrm{imm}\,(ML^{-1}),$$

*c'è una unica soluzione stretta di* (E) *tale che*

$$Lu(\cdot),\ \frac{d}{dt}Mu(\cdot) \in C^{\alpha+\beta-1}([0,T];X).$$

Nel paragrafo 2 vengono esposti risultati di esistenza per la (1) nel caso più semplice che $D(B) \subseteq D(A)$. Questi permettono di trattare vari problemi di Cauchy-Dirichlet, ottenendone soluzioni più regolari di quelli generalmente noti in letteratura: il riferimento è principalmente [CS].
Utilizzando e sviluppando un'idea di S.Yu.Yakubov [Y] (vedi anche [K])trattiamo nel paragrafo 3 il caso più complicato $D(A) \subseteq D(B)$.
Diamo infine una condizione sufficiente a garantire l'applicabilità dei risultati ottenuti, verificata in un esempio concreto di equazione alle derivate parziali.

## 2.L'equazione (1) nel caso $D(B) \subseteq D(A)$.

Consideriamo il problema

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Cu') + Bu' + Au = f = f(t), & 0<t\leq T, \\ u(0) = u_0, \\ Cu'(0) = Cu_1, \end{cases}$$

sotto la seguente ipotesi sugli operatori A,B,C :

$$(3) \quad \begin{cases} A,B,C \text{ sono operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach complesso } X \text{ in sè} \\ D(B) \subseteq D(C),\ D(B) \subseteq D(A). \end{cases}$$

Posto $u' = v$,

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix},$$

si considerano M ed L come operatori nello spazio $D(B)\times X$, dove $D(B)$ è munito della norma del grafico.
In virtù delle ulteriori ipotesi che faremo, non è restrittivo supporre anche che B abbia inverso limitato.
Il problema (2) viene allora tradotto in

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(Mz(t)) + Lz(t) = F(t), & 0<t\leq T, \\ Mz(0) = Mz_0, \end{cases}$$

dove $z(t) = (u(t)\,,\,v(t))$, $z_0 = (u_0,u_1)$, $F(t) = (0,f(t))$, $0<t\leq T$.

Intendiamo applicare la Proposizione 2 e la Proposizione 3.
A tale fine introduciamo il fascio operatoriale

$$P(z) = z^2C + zB + A; \quad z \text{ complesso},$$

ed osserviamo che, formalmente,

$$P(z) = (z + AB^{-1})(zC + B) - z\,AB^{-1}C = (z + AB^{-1})\,Q(z)(zC + B),$$

dove

$$Q(z) = I - z(z + AB^{-1})^{-1}AB^{-1}C(zC + B)^{-1}.$$

Ciò premesso, appare chiaro il tipo di assunzioni che faremo sugli operatori A, B e C:

$$(5)\qquad \begin{cases} zC + B \text{ ha inverso limitato per ogni } z\in\Sigma_\eta, \\ \|C(zC + B)^{-1};\mathcal{L}(X)\| \le k(1 + |z|)^{-\beta},\ z\in\Sigma_\eta, \\ \text{con } 0<\beta\le\eta\le 1. \end{cases}$$

In virtù della (3), della (5) e della espressione precedentemente ottenuta per P(z), non è difficile riconoscere che

$$\|M(zM + L)^{-1};\mathcal{L}(D(B)\times X)\| \le k'(1 + |z|)^{-\beta},\ z\in\Sigma_\eta,$$

con k' una opportuna costante positiva.

In modo del tutto analogo per equazioni del primo ordine si introducono le definizioni di soluzione CLASSICA e STRETTA di (2). Si ha:

**Teorema 1.** *Valgano le ipotesi* (3) *e* (5).
*Se* $u_0, u_1 \in D(B)$ *e* $f\in C^\sigma([0,T]; X)$, *dove*

$$2\eta + \beta > 2,\ (2 - \eta - \beta)/\beta < \sigma \le 1,$$

*allora il problema* (2) *ha una unica soluzion classica* u, *con*

$$u'\in C((0,T];D(B)),\ Cu'\in C^1((0,T];X),\ Au \in C((0,T];X).$$

**Teorema 2.** *Supposto* (3) e (5) *soddisfatte con* $\eta = 1$, *sia* $1 - \beta < \sigma < 1$.
*Se* $u_0, u_1\in D(B)$, $f\in C^\sigma([0,T];X)$ *e vale*

$$f(0) - Au_0 - Bu_1 \in C(D(B)),$$

*allora il problema* (2) *ha una unica soluzione stretta* u *tale che*

$$Bu' \ e\ \frac{d}{dt}(Cu') \in C^{\sigma+\beta-1}([0,T];X).$$

Diamo di seguito due esempi di applicazione dei Teoremi 1 e 2.

**Esempio 1.** Consideriamo il problema:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Big(m(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big) - \Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f, \quad \text{in } (0,T]\times\Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{in } (0,T]\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x\in\Omega, \\ m(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) \to m(x)u_1(x) \quad \text{per } t\to 0+, \quad x\in\Omega, \end{cases}$$

dove $\Omega$ è un dominio limitato di $R^n$ con frontiera $\partial\Omega$ regolare, $n\geq 1$, e $m\in L^\infty(\Omega)$ è non negativa su $\Omega$.
Problemi del tipo (6) sono stati molto studiati, ( vedi per riferimenti [CS]).
Di solito si lavora nello spazio $H^{-1}(\Omega)$, perchè in tale spazio le stime per il risolvente (modificato) degli operatori che figurano nell'equazione sono quelle ottimali, cioè $\eta=\beta=1$.
Se si vuole trattare (6) nell'ambiente più naturale e regolare $X=L^2(\Omega)$, si prende

$$D(B)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \quad B=-\Delta,$$

C = moltiplicazione per m(x).
Si vede ([FY 1]) che allora

$$\|C(zC+B)^{-1}; \mathscr{L}(X)\| \leq k\,|z|^{-1/2}, \; z\neq 0,\; z\in\Sigma_1.$$

Inoltre, se $m\in C^1(\bar{\Omega})$ e

$$|\nabla m(x)|\leq C m(x)^\rho,$$

con $0<\rho\leq 1$, allora la stima migliore

$$\|C(zC + B)^{-1};\mathscr{L}(X)\| \leq k|z|^{-\gamma}, \quad z\neq 0, \; z\in\Sigma_1,$$

con $\gamma = (2 - \rho)^{-1}$, è soddisfatta.

**Esempio 2.** Per semplicità, ci limiteremo a considerare il caso n = 1.

Sia $\Omega = (0,1)$ e sia $C_0>0$. Il problema è

$$(7)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(m(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) - \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + C_0\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f = f(t,x), \quad 0 < t \leq T,\; 0 < x < 1, \\ u(t,0) = u(t,1) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0, \qquad 0 < t \leq T, \\ \lim\limits_{t\to 0} u(t,x) = u_0(x), \quad 0<x<1, \\ \lim\limits_{t\to 0} m(x)\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = m(x)\, u_1(x), \quad 0<x<1. \end{cases}$$

Questa volta prendiamo $X = L^p(0,1)$, $1<p<\infty$,

$D(B) = W^{2,p}(0,1)\cap W_0^{1,p}(0,1)$,$(Bu)(x) = -u''(x) + C_0u(x)$, $u\in D(B)$,

$m\in L^\infty(0,1)$, $m(x)\geq 0$.

In virtù dei risultati di [FY2], si ha

$$\|C(zC + B)^{-1}; \mathcal{L}(x)\| \leq k|z|^{-1/p},\ \ z\neq 0,\ \ z\in\Sigma_1.$$

Così, anche (7) può essere trattato per mezzo dei precedenti Teoremi.

**2. Il caso D(A)⊂D(B).**

Per trattare il problema (2) nel caso in cui $D(A)\subseteq D(B)$, estenderemo il metodo di [K,Y], crf. [F,FO], relativo a $C$ = operatore identità.
Sostanzialmente, l'idea é di "triangolarizzare" la matrice di trasformazioni, in generale multivoche, $LM^{-1}$, ed è stata ampiamente utilizzata in varie questioni di teoria degli operatori, per cui rimandiamo, per esempio, a [R].

Osserviamo che (2) può essere equivalentemente formulato nello spazio $X\times X$ come

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t)\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ f(t)\end{bmatrix},\ \ 0 < t \leq T, \\ \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(0) \\ v(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1\end{bmatrix}.\end{cases}$$

Poichè vogliamo applicare a (8) la Proposizione 1, dobbiamo vedere $C^{-1}$ come una applicazione multivoca, in generale. Posto

$$AB^{-1} = U,\ \ BC^{-1}=V,$$

cosicchè

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ A & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & C^{-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & -U \\ U & -U+V\end{bmatrix} = \mathcal{Q},$$

dobbiamo considerare il risolvente $(\mathcal{Q} + z)^{-1}$, z complesso.

Denotiamo con $\Sigma'_{\eta}$ l'insieme
$\Sigma'_{\eta'}=\{z\ ;\ \mathrm{Re}z \geq -c'(1 + |\mathrm{Im}z|)^{\eta'}\},\ \ c'>0,\ \ 0<\eta'\leq 1.$

Formuliamo allora le seguenti assunzioni relative agli operatori A,B,C:

(a)" $\quad \|C(zC+ B)^{-1};\ \mathcal{L}(X)\| \leq k(1 +|z|)^{-\beta},\ z\in\Sigma_{\eta},\ \ 0<\beta\leq\eta\leq 1,$

(b)" $\quad \|B(zB + A)^{-1};\ \mathcal{L}(X)\| \leq k(1+|z|)^{-\alpha},\ z\in\Sigma'_{\eta'},\ \ 0<\alpha\leq\eta'\leq 1,$

(c)" $\quad D(V)\ (=D(BC^{-1}))\subseteq D(U) = D(AB^{-1})$ *e c'é una costante positiva* $\delta$ *tale che*

$$\|U(z + V)^{-1};\ \mathcal{L}(X)\| \leq k\,|z|^{-\delta},\ \textit{per ogni}\ z\in\Sigma_{\eta},\ |z|\ \textit{grande}.$$

Per i nostri scopi non è restrittivo supporre $\eta\leq\eta'$ e $c = c'$, come faremo.

Si dimostrano allora i seguenti

**Teorema 3.** *Assumiamo* (a)", (b)", (c)", $\eta \leq \eta'$ *e*

$$\alpha+\delta,\ \alpha+\beta > 1,\ 2\eta+\alpha+\beta > 3.$$

*Se*

$$(3-\eta-\alpha-\beta)/\eta < \sigma \leq 1,$$

*allora per ogni* $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(B)$ *e* $f \in C^{\sigma}([0,T];X)$, *il problema* (2) *ha una soluzione classica.*

**Teorema 4.** *Valgano* (a)", (b)",(c)", $\eta = \eta' = 1$, *e*

$$0<\alpha,\beta\leq 1,\ \alpha+\beta,\alpha+\delta>1,\ 2-\alpha-\beta<\sigma<1.$$

*Allora per ogni* $u_0, u_1 \in D(A)$ *e* $f \in C^{\sigma}([0,T];X)$ *soddisfacenti*

$$f(0) - Au_0 - Bu_1 \in C(D(B)),$$

*esiste una soluzione stretta* u *di* (2), *con*

$$Au,\ Bu',\ (Cu')' \in C^{\sigma+\alpha+\beta-2}([0,T];X).$$

E' chiaro che la condizione veramente restrittiva è data dalla ipotesi (c)", che comporta una forte connessione tra gli operatori.
Il risultato successivo fornisce un criterio (piuttosto semplice e spesso utilizzabile nelle equazioni alle derivate parziali) per il suo verificarsi.

**Teorema 5.** *Supponiamo valgano* (a)",(b)". *Inoltre,*

i) D(B) *è invariante per l'operatore* C,

ii) $\|BCu;X\| \leq k\ \|Bu;X\|$ *per ogni* $u \in D(B)$, *essendo* k *una costante* $> 0$,

iii) B *è un operatore positivo con potenze immaginarie limitate e* $\|B^{is};\mathcal{L}(X)\| \leq$ Costante *per* $|s| \leq \rho$, *dove* $\rho>0$ *opportuno,*

iv) *esiste* $\tau \in (0,1)$ *tale che*

$$D(B^{1+\tau}) \subseteq D(A)$$

*e*

$$\|Au;X\| \leq k'\ \|B^{1+\tau}u;X\|,\quad u \in D(B^{1+\tau}),\ k'>0.$$

*Allora, se* $0<\tau<\beta$, *la condizione* (c)" *è soddisfatta.*

*Dimostrazione.* La ii) garantisce che

$$\|B(z+BC^{-1})^{-1}f;X\| = \|BC(zC+B)^{-1}f;X\| \leq k\ \|B(zC+B)^{-1}f;X\| \leq$$

$$\leq k_1(1+|z|^{1-\beta})\|f;X\|, \quad z\in\Sigma_\eta, \quad f\in X.$$

E' ben noto [T, p.103] che, in virtù della iii), per ogni $\theta\in(0,1)$ $D(B^\theta)$ coincide con lo spazio di interpolazione complessa $[X,D(B)]_\theta$, e così

$$\|C(zC+B)^{-1}; L(X;D(B^\tau))\| = \|(z+BC^{-1})^{-1}; L(X;D(B^\tau))\| \leq$$

$$\leq k''|z|^{-(\beta-\tau)}, \quad z\in\Sigma, \quad |z| \text{ grande. } \#$$

**Esempio 3.** Per semplicità, ci limitiamo a considerare come $\Omega$ l'intervallo aperto limitato $I=(a,b)$ di R.

Estensioni ad $R^n$, $n>1$, sono possibili e anche in spazi $L^p(\Omega)$, $1<p<+\infty$, in forza dei risultati di R.de Laubenfels [deL].

Sia $X=L^2(I)$ e denotiamo con C l'operatore di moltiplicazione per m(x) nello spazio X, dove $m(\cdot)$ è una funzione non negativa su $\bar{I}$ e sufficientemente regolare.

Sia $K:X\to X$ l'operatore definito da

$$D(K)=H^2(I)\cap H_0^1(I), \quad Ku=-u'', \quad u\in D(K).$$

Allora

$$A=K^{m+q}, \quad B=K^m, \quad m,q\in\mathbb{N}, \quad q<m.$$

Utilizzando le condizioni ai limiti soddisfatte dagli elementi di D(B), si riconosce che vale (a)", con $\beta=1/2$ ed $\eta=1$.

Inoltre, anche (b)" è verificata con $\alpha=\eta'=1$.

Per applicare il Teorema 5 dovremo assumere una maggiore regolarità alla funzione $m(\cdot)$; precisamente,

$$m(\cdot)\in C^{(2m)}(\bar{I}) \text{ e } m^{(2j+1)}(a)=m^{(2j+1)}(b)=0, \; j=0,1,\dots,m-1.$$

Allora le assunzioni i), ii) del Teorema 5 sono soddisfatte.

D'altra parte è noto che vale iii) ed anche iv) è valida con $\tau=q/m$.

Pertanto, se $2q<m$, i Teoremi 3 e 4 si applicano.

E' pertano possibile trattare il problema di Cauchy-Dirichlet corrispondente, connesso con l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(m(x)\frac{\partial u}{\partial t}\Big) + (-1)^m \frac{\partial^{2m+1}u}{\partial x^{2m}\partial t} + (-1)^{m+q}\frac{\partial^{2(m+q)}u}{\partial x^{2(m+q)}} = f(t,x), \quad 0<t\leq T, \quad a<x<b.$$

## Bibliografia

[CS] R.W.Carroll-R.E.Showalter, "Singular and Degenerate Cauchy Problems", ed. Academic Press, 1976.

[deL] R.de Laubenfels, *Powers of generators of holomorphic semigroups,* Proceed. AMS 99(1987), 105-108.

[F] A.Favini, *Paraboliicity of second order differential equations in Hilbert space* , Semigroup Forum 42(1991), 303-312.

[FO] A.Favini-E.Obrecht, *Conditions for parabollicity of second order abstract differential equations* , Diff.&Int.Eqs.4(1991), 1005-1022.

[FY1] A.Favini-A.Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution problems* , in corso di stampa su "Annali Mat.Pura Appl.".

[FY2] A.Favini-A.Yagi, *Space and time regularity for degenerate evolution equations* , in corso di stampa su "J.Japan Math.Soc.".

[K] S.G.Krein, "Linear Differential Equations in Banach Space", ed.AMS, 1971.

[R] L.Rodman, "An Introduction to Operator Polynomials", ed. Birkhäuser, 1989.

[T] H.Triebel, "Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators", ed. North-Holland, 1978.

[Y] S.Ya.Yakubov, *A nonlocal boundary value problem for a class of Petrovskii well posed equations,* Math.Sb.(N.S.), 118(60),(1982), 252-261; Math.USSR-SB, 46(1983), 255-265.